

Практическое занятие №1

Тема: Функция. Область определения и множество значений функции

Цель: Формирование навыков нахождения области определения функций, и вычисления частных значений функций

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Переменная y называется *функцией* переменной x , если каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y .

Символически функциональная зависимость между переменной y (функцией) и переменной x (аргументом) записывается с помощью равенства $y = f(x)$, где f обозначает совокупность действий, которые надо произвести над x , чтобы получить y .

Числовое значение функции, соответствующее данному числовому значению аргумента, называется *частным значением этой функции*. Например, функция $y = f(x)$ при $x = a$ принимает значение $y = f(a)$.

Областью определения (существования) функции $D(y)$ называется множество всех действительных значений аргумента x (множество всех точек числовой оси), при которых она имеет действительное значение.

Множеством значений функции $E(y)$ называется множество всех действительных значений функции y , которые она может принимать.

Для задания функции необходимо и достаточно задать закон соответствия f , по которому для каждого значения аргумента можно указать единственное значение функции и область определения $D(y)$.

Функция может быть задана аналитически (формулой), таблицей, графиком или каким-либо другим способом.

Примеры

1. Дана функция $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. Найти $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$.

Решение: Чтобы вычислить значение $f(0)$, надо в данную функцию вместо аргумента x подставить его значение $x = 0$. Имеем, $f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1$.

Аналогично получим $f(1) = -1$, $f(-1) = -5$ и $f(2) = 1$.

2. Найти область определения функций:

$$\begin{array}{llll}
 1) y = x^2; & 2) y = \frac{1}{x}; & 3) y = \frac{1}{2x-6}; & 4) y = \frac{1}{x^2-5x+6}; \\
 5) y = \sqrt{x}; & 6) y = \sqrt{2x-4}; & 7) y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}; & 8) y = \sqrt{\frac{3x-2}{2x+6}}.
 \end{array}$$

Решение: 1) Здесь на x не накладывается никаких ограничений, поэтому функция $y = x^2$ определяется на множестве R .

2) Если $x = 0$, то y не имеет числового значения (на ноль делить нельзя). Для всех значений (кроме нуля) y принимает действительные значения, поэтому областью определения служит вся числовая ось, кроме $x = 0$.

3) Функция определена для всех значений x , кроме тех, при которых знаменатель дроби обращается в ноль. Решив уравнение $2x - 6 = 0$, найдем его корень $x = 3$. Таким образом, область определения $D(y)$ есть вся числовая ось, кроме точки $x = 3$.

4) Функция определена для всех значений x , кроме тех, при которых знаменатель дроби обращается в ноль. Решив уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, найдем его корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Следовательно, область определения $D(y)$ - вся числовая ось, кроме точек $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

5) Квадратные корни определены для неотрицательных чисел. Поэтому функция $y = \sqrt{x}$ определена для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $x \geq 0$, т.е. $0 \leq D(y) < \infty$.

6) Решив неравенство $2x - 4 \geq 0$, получим $x \geq 2$, то есть $2 \leq D(y) < \infty$.

7) Найдем область определения каждого из слагаемых: общая часть этих областей и будет областью определения данной функции. Для первого слагаемого $x \geq 0$, а для второго $x \geq 1$. Тогда областью определения суммы $\sqrt{x} + \sqrt{x-1}$ служит промежуток $1 \leq D(y) < \infty$.

8) Функция определена для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+6}} \geq 0$.

$$\text{Таким образом, } \sqrt{\frac{3x-2}{2x+6}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x > -3 \\ x \leq \frac{2}{3} \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x < -3 \end{cases}. \text{ Следовательно, областью}$$

$$\text{определения функции является совокупность промежутков: } D(y) = \begin{cases} x < -3 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Дана функция $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 4$. Найдите $f(0)$, $f(-1)$ и $f(2)$.
2. Дана функция $s(t) = t^2 - 6t + 8$. Найдите $s(0)$, $s(2)$ и $s(-1)$.
3. Дана функция $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. Покажите, что $f(1) = f(-1)$.
4. Дана функция $f(x) = x^5 + x^3$. Покажите, что $f(2) = -f(-2)$.

Найдите области определения функций:

5. 1) $y = x^2$; 2) $y = x^2 - 1$; 3) $y = x^3 + 1$.
6. 1) $y = \frac{1}{4x-2}$; 2) $y = \frac{x+2}{2x-8}$; 3) $y = \frac{x^2-4}{x+2}$.
7. 1) $y = \frac{1}{1-x^2}$; 2) $y = \frac{1}{x^2-x-12}$; 3) $y = \frac{4x-1}{3x^2-5x-2}$.
8. 1) $y = \sqrt{1-x}$; 2) $y = \sqrt{18-6x}$; 3) $y = \sqrt{3x-12}$.
9. 1) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$; 2) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5}$.
10. 1) $y = 3\sqrt{5-x} - \frac{4}{\sqrt{x-3}}$; 2) $y = \sqrt{7-x} + \frac{1}{x-1}$.
11. 1) $y = \sqrt{x^2-2x-8}$; 2) $y = \sqrt{x^2-8x+15}$; 3) $y = \sqrt{(2-x) \cdot (5+x)}$.
12. 1) $y = \sqrt{\frac{x-8}{12-x}}$; 2) $y = \sqrt{\frac{4x-8}{3-6x}}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется функцией?
2. Что нужно указать для задания функции?
3. Какие способы задания функции существуют?
4. Перечислите основные свойства функций.
5. Какая функция называется обратной к данной?

Практическое занятие №2

Тема: Графики функций

Цель: Формирование навыков построения графиков функций

На выполнение работы отводится 4 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Функцию $y = f(x)$ иногда можно представить таблицей, в первой строке которой перечисляются значения независимой переменной x , а во второй – соответствующие значения $f(x)$ зависимой переменной.

Разумеется, для функций, области определения $D(f)$ которых, представляют собой бесконечные множества, невозможно составить таблицу всех значений, но часто бывает полезным представить функцию как множество всех упорядоченных пар чисел $(x; f(x))$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$.

Из этого определения следует, что график функции $y = f(x)$ можно рассматривать как полную таблицу функции.

Известны графики многих функций. Например, график функции $y = kx + b$ есть прямая линия (рис. 1), график функции $y = x^2$ - парабола (рис. 2), график функции $y = \frac{1}{x}$ (обратная пропорциональная зависимость) – гипербола (рис. 3).

В графике содержится вся информация о функции.

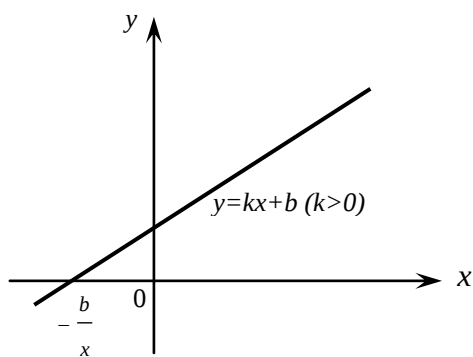


Рис. 1

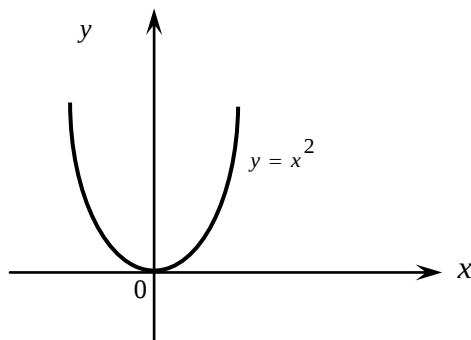


Рис. 2

Задания для самостоятельной работы

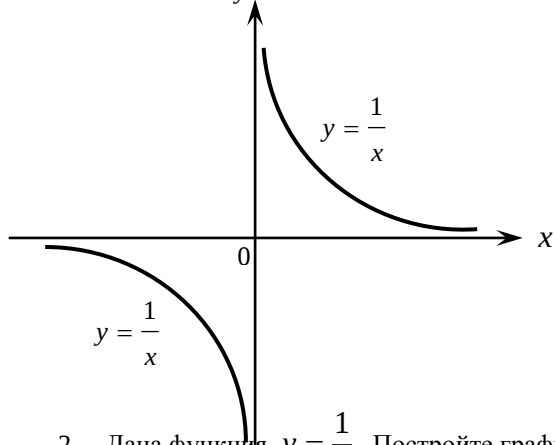


Рис. 3

1. Дана функция $y = x^2$. Постройте графики функций:

1) $y = x^2 - 3$; 2) $y = x^2 + 2$;

3) $y = 2x^2$; 4) $y = -2x^2$;

5) $y = -2x^2 + 3$; 6) $y = 3(x + 2)^2$;

7) $y = 2(x - 1)^2 + 3$; 8) $y = -(x - 3)^2 - 2$.

2. Дана функция $y = \frac{1}{x}$. Постройте графики функций:

1) $y = \frac{1}{x} + 3$;

2) $y = \frac{1}{x} - 2$;

3) $y = -\frac{1}{x}$;

4) $y = -\frac{2}{x}$;

5) $y = -\frac{3}{x} - 1$;

6) $y = \frac{1}{x + 1}$;

7) $y = -\frac{1}{x + 2}$;

8) $y = \frac{1}{x - 3} + 2$;

9) $y = \frac{1}{2x - 3} - 1$;

10) $y = \frac{1}{2x + 3}$.

3. Дана функция $f(x) = \frac{1}{x} + x$. Постройте графики функций:

1) $y = f(x) + 3$;

2) $y = f(x + 3)$;

3) $y = 3f(x)$;

4) $y = f(3x)$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется графиком функции?
2. Какие преобразования графиков функции вы знаете?
3. Какие функции называются монотонными?

4. Какие функции называются периодическими? Приведите примеры.
5. Какие функции называются четными, а какие нечетными?

Практическое занятие №3

Тема: Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения

Цель: Формирование навыков нахождения области определения логарифмических функций и решения простейших логарифмических уравнений

На выполнение работы отводится 3 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Логарифмом числа N ($N \in R_+$) по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени x , в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число N , то есть, $\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$.

Данное равенство, выражающее определение логарифма, можно переписать в виде $a^{\log_a N} = N$.

Это равенство называется *основным логарифмическим тождеством*. Логарифмы при основании $a = 10$ называются *десятичными*. Функция $y = \log_a x$ ($x \in R_+, a > 0, a \neq 1$) называется *логарифмической функцией*.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной по отношению к показательной функции $y = a^x$ ($x \in R, a > 0, a \neq 1$). Поэтому их графики симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Приведем основные свойства логарифмической функции.

1. Область определения $D(y) = R_+$.
2. Множество значений функции: $E(y) = R$, то есть вся числовая прямая.
3. Логарифм единицы равен нулю, логарифм основания равен единице: $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$.
4. Функция $y = \log_a x$ ($1 < a < \infty$) возрастает в промежутке $0 < x < \infty$. Если $1 < a < \infty$, то $\log_a x > 0$ при $1 < x < \infty$ и $\log_a x < 0$ при $0 < x < 1$, то есть при $1 < a < \infty$ логарифмы чисел, больших единицы, положительны, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны.
5. Функция $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) возрастает в промежутке $0 < x < \infty$. Если $0 < a < 1$, то $\log_a x < 0$ при $1 < x < \infty$ и $\log_a x > 0$ при $0 < x < 1$, то есть при $0 < a < 1$ логарифмы чисел, меньших единицы, положительны, а логарифмы чисел, больших единицы, отрицательны.

Алгебраические операции над логарифмами

1. Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей:
 $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$.
2. Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$$

3. Логарифм степени положительного основания равен произведению показателя степени на логарифм основания степени: $\log_a M^n = n \cdot \log_a M$.
4. Логарифм корня из положительного числа равен логарифму подкоренного числа, деленному на показатель корня: $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$.

Логарифмирование и потенцирование

Если число x представлено алгебраическим выражением, содержащим числа $a, b, c, \dots$, то найти логарифм этого выражения – значит, выразить логарифм числа x через логарифм чисел $a, b, c, \dots$. Нахождение положительного числа по его логарифму называют *потенцированием*.

Зависимость между логарифмами чисел при разных основаниях

1. Формула перехода от логарифмов по основанию a , к логарифмам по основанию b имеет вид:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

2. Зависимость между основаниями a и b выражается формулой: $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$.

3. Имеет место соотношение: $\log_{a^m} M = \frac{1}{m} \log_a M$.

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим*.

Примеры

1. Найти $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

Решение: I способ: $\log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{\frac{1}{6}} 6^2 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = -2$.

II способ: $\left(\log_{\frac{1}{6}} 36 = x\right) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{1}{6}\right)^x = 36\right) \Leftrightarrow (6^{-x} = 6^2); x = -2$.

2. Решить уравнения:

1) $\log_6 x = -2$; 2) $\log_x 8 = -\frac{1}{2}$.

Решение: 1) $(\log_6 x = -2) \Leftrightarrow (x = 6^{-2}); x = \frac{1}{36}$;

2) $\left(\log_x 8 = -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x^{-\frac{1}{2}} = 8\right) \Leftrightarrow \left(\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 8^{-2}\right); x = 8^{-2} = \frac{1}{64}$.

3. Найти области определения следующих функций:

1) $y = \log_4(8 - 2x)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x + 6)$; 3) $y = \log_3(x + 6) + \log_{\frac{1}{3}}(6 - x)$.

Решение: 1) Здесь $8 - 2x > 0$, $x < 4$, то есть $-\infty < D(y) < 4$.

2) Имеем $2x + 6 > 0$, $2x > -6$, $x > -3$, то есть $-3 < D(y) < \infty$.

$$3) \text{ Имеем } \begin{cases} x+6 > 0 \\ 6-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x < 6 \end{cases}, \text{ то есть } -6 < D(y) < 6.$$

4. Решить уравнения:

$$1) \log_3(x-12) = 2; \quad 2) \log_x 16 - \log_x 2 = \frac{1}{2}; \quad 3) \lg(x-3) + \lg(x-2) = 1 - \lg 5;$$

$$4) \lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1; \quad 5) x^{\lg x} = 100x.$$

Решение: 1) Используя определения логарифма и учитывая область определения, получим

$$\log_3(x-12) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-12 = 3^2 \\ x-12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ x > 12 \end{cases} \Leftrightarrow x = 21 \quad \text{Ответ: } x=21$$

$$2) \log_x 16 - \log_x 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x(16/2) = \frac{1}{2} \\ x > 0, \quad x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^{1/2} = \frac{16}{2} = 8 \Leftrightarrow x = 64$$

3) Учитывая что $1 = \lg 10$, потенцируем:

$$\begin{aligned} \lg(x-3) + \lg(x-2) = 1 - \lg 5 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x-3) + \lg(x-2) = \lg 10 - \lg 5 \\ x-3 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lg[(x-3)(x-2)] = \lg(10/5) \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-2) = 2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

4) Данные уравнения преобразуем к квадратному, решив которое относительно переменной $\lg x$ получим

$$\begin{aligned} \lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 + 2 \lg x - \lg^2 2 + 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lg x + \lg 2 = -1 \\ \lg x - \lg 2 = -1 \end{cases} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lg(2x) = -1 \\ \lg(x/2) = -1 \end{cases} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 10^{-1} \\ x/2 = 10^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,05 \\ x = 0,2 \end{cases}. \end{aligned}$$

5) Логарифмируем обе части уравнения по основанию 10 и, решая затем полученное квадратное уравнение, находим

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lg x \cdot \lg x = \lg 100 + \lg x \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 x - \lg x - 2 = 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lg x = -1 \\ \lg x = 2 \end{cases} \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,1 \\ x = 100 \end{cases} \end{aligned}$$

5. Решить уравнения:

$$1) \log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6;$$

$$2) \log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$$

Решение: 1) Здесь $x > 0$. Преобразуем левую часть уравнения к основанию 3, с помощью формулы

$$\log_{a^m} M = \frac{1}{m} \log_a M, \quad \text{получим} \quad \log_{\sqrt{3}} x = \log_{3^{1/2}} x = 2 \log_3 x \quad \text{и}$$

$$\log_{1/3} x = \log_{3^{-1}} x = -\log_3 x. \quad \text{Таким образом,}$$

$$\log_3 x + 2 \log_3 x - \log_3 x = 6 \Leftrightarrow 2 \log_3 x = 6 \Rightarrow x = 3^3 \Leftrightarrow x = 27.$$

2) Здесь $x < 0$. По формуле $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$ преобразуем левую часть уравнения к

$$\text{основанию} \quad 2: \quad \log_{x^2} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} = \frac{4}{2 \log_2 x};$$

$$\log_{2x} 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = \frac{6}{1 + \log_2 x}.$$

Тогда,

$$\frac{4}{2 \log_2 x} + \frac{6}{1 + \log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \log_2^2 x - 5 \log_2 x - 2 = 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1/3 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{-1/3} \\ x = 4 \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите x :

$$1) \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{8} = x \right); \quad 2) \log_{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{27} \right) = x; \quad 3) \log_x 0,125 = -3;$$

$$4) \log_x 4 = -\frac{1}{2}; \quad 5) \log_{16} x = \frac{3}{4}; \quad 6) \log_5 x = -3.$$

2. Найдите области определения функций:

$$1) y = \log_2(6 - 4x); \quad 2) y = \log_{\frac{1}{5}}(4x - 5); \quad 3) y = \log_5(x + 8) + \log_5(4 - x).$$

Решить уравнения:

$$3. \quad 1) \log_5(x + 10) = 2; \quad 2) \log_x 2 + \log_x 3 = \frac{1}{3}; \quad 3) \lg(7x - 9)^2 + \lg(3x - 4)^2 = 2;$$

$$4) \lg(x - 1)^3 - 3 \lg(x - 3) = \lg 8 \quad 5) \log_4 \log_3 \log_2 x = 0.$$

$$4. \quad 1) \log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 = 1; \quad 2) \log_x(5x^2) \cdot \log_5^2 x = 1; \quad 3) \log_2(9 - 2^x) = 3 - x.$$

$$5. \quad 1) \frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1; \quad 2) \log_3 \log_4 \log_3^2(x - 3) = 0.$$

$$6. \quad 1) x^{\lg x} = 1; \quad 2) x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x; \quad 3) x^x = x.$$

$$7. \quad 1) \log_2 x + \log_8 x = 8 \quad 2) 2 \log_x 25 - 3 \log_{25} x = 1.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение логарифмической функции. Приведите примеры.

2. Сформулируйте свойства логарифмической функции.
3. Какие уравнения называются равносильными? Приведите примеры.
4. Какое уравнение называется следствием другого? Приведите примеры.
5. Какие методы преобразования уравнений вы знаете?

Практическое занятие №4

Тема: Показательные уравнения

Цель: Формирование навыков решения показательных уравнений

На выполнение работы отводится 3 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется *показательным*.

При решении показательных уравнений вида $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) исследуются следующие свойства: $(a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}) \Leftrightarrow (f(x) = \varphi(x))$.

Преобразование показательного уравнения к виду $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ выполняется многими способами. Ниже рассмотрены некоторые из этих способов.

Примеры

Способ уравнивания оснований

1. Решить уравнения:

$$1) 2^{x^2-7x+12} = 1; 2) \left(\frac{1}{0,125}\right)^{2x} = 128; 3) 2^{x-2} = 5^{2-x}; 4) 2^{x+3} - 2^x = 112.$$

Решение: 1) По определению нулевого показателя получим, $(x^2 - 7x + 12 = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases}$.

$$2) \left(\frac{1}{0,125}\right)^{2x} = 128 \Leftrightarrow (2^3)^{2x} = 2^7 \Leftrightarrow 2^{6x} = 2^7 \Rightarrow 6x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}.$$

3) Записав уравнение в виде $2^{x-2} \cdot 5^{x-2} = 1$, получим

$$2^{x-2} \cdot 5^{x-2} = 1 \Leftrightarrow (2 \cdot 5)^{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$(2^{x+3} - 2^x) = 112 \Leftrightarrow 2^x(2^3 - 1) = 112 \Leftrightarrow 2^x \cdot (8 - 1) = 112 \Leftrightarrow$$

$$4) \Leftrightarrow 2^x = \frac{112}{7} \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$$

Логарифмирование обеих частей уравнения. Применения основного логарифмического тождества

Решить уравнения:

$$1) 3^{2x-3} = 11^{1-x}; 2) 3^x = 8.$$

Решение: 1) Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, получим,

$$3^{2x-3} = 11^{1-x} \Leftrightarrow (2x-3)\lg 3 = (1-x)\lg 11 \Leftrightarrow 2x\lg 3 + x\lg 11 = \lg 11 + 3\lg 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x(2\lg 3 + \lg 11) = \lg 11 + 3\lg 3) \Leftrightarrow \left| x = \frac{\lg 11 + 3\lg 3}{2\lg 3 + \lg 11} \right|$$

2) Согласно тождеству $a^{\log_a N} = N$, имеем $8 = 3^{\log_3 8}$, тогда $3^x = 8 \Leftrightarrow 3^x = 3^{\log_3 8} \Leftrightarrow x = \log_3 8$.

Преобразование квадратному уравнению

Решить уравнения:

$$1) 4^x + 2^{x+1} - 8 = 0; \quad 2) 5^x + \frac{125}{5^x} = 30; \quad 3) 6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$$

Решение: 1) $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 8 = 0$, решаем квадратное уравнение относительно

переменной 2^x : $2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -4 \\ 2^x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{нет решений} \\ x = 1 \end{cases}.$

$$2) 5^x + \frac{125}{5^x} = 30 \Leftrightarrow 5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 5 \\ 5^x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

3) $6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$. Разделив все члены уравнения на 3^{2x} ($3^{2x} \neq 0$), получим квадратное уравнение относительно переменной $(\frac{2}{3})^x$:

$$6 \cdot (\frac{2}{3})^{2x} - 13 \cdot (\frac{2}{3})^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{2}{3})^x = \frac{2}{3} \\ (\frac{2}{3})^x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Способ группировки

Решить уравнение: $5^{2x+1} + 7^{x+1} - 175^x - 35 = 0$

$$5^{2x+1} + 7^{x+1} - 175^x - 35 = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} \cdot 5 + 7 \cdot 7^x - 25^x \cdot 7^x - 35 = 0 \Leftrightarrow$$

Решение: $\Leftrightarrow 25^x(5 - 7^x) - 7(5 - 7^x) = 0 \Leftrightarrow (5 - 7^x)(25^x - 7) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5 - 7^x = 0 \\ 25^x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_7 5 \\ x = \log_{25} 7 \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения:

$$1. \quad 1) \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}; \quad 2) \left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}.$$

$$2. \quad 1) (0,5)^{\sqrt{x-3}} = 1; \quad 2) 5^{x^2-8x+12} = 1; 3) 2^{x^2} : 4^x = 8; 4) 9^{2\sqrt{x}} = 3^{2x-6};$$

$$5) 1000\sqrt[3]{0,1} = 100^x.$$

$$3. \quad 1) 5^{x-4} = 6^{x-4}; \quad 2) 8^{5-x} = 7^{x-5}; 3) 4^{2x-3} = 7^{x-1,5}; \quad 4) 9^{x+2} = 13^{2x-1}.$$

$$4. \quad 1) 3^{x+4} - 5^{x+3} = 3^x - 5^{x+2}; \quad 2) 5^{x+1} + 5^x = 750; \quad 3) 2^x - 2^{x-2} = 3;$$

$$4) 27^{x-\frac{2}{3}} - 9^{x-1} = 2 \cdot 3^{2x-1} - 2 \cdot 3^{3x-1}.$$

$$5. \quad 1) 7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0; \quad 2) 2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0; \quad 3) 3^{x+1} + \frac{18}{3^x} - 29 = 0;$$

$$4) 3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0; \quad 5) 4^x + 6^x - 9^x = 0; \quad 6) 3^{2x+1} + 8^{x+1} - 72^x - 24 = 0.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение показательной функции. Приведите примеры.
2. Сформулируйте свойства показательной функции. Приведите примеры.
3. Приведите примеры графиков показательных функций.
4. Какие простейшие приемы решения показательных уравнений вы знаете?
5. В чем заключается суть метода потенцирования при решении логарифмических уравнений?
6. В чем заключается суть метода логарифмирования при решении показательных уравнений?

Практическое занятие №5

Тема: Системы показательных уравнений

Цель: Формирование навыков решения систем показательных уравнений

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Примеры

Решить системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75 \\ 3^y \cdot 5^x = 45 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 4^x \cdot 5^y = 16 \\ 2 \cdot 3^x = 18 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 27 \\ 3^x + 3^y = 12 \end{cases}.$$

Решение: 1) Перепишем данную систему в виде $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 3 \cdot 5^2 \\ 3^y \cdot 5^x = 3^2 \cdot 5 \end{cases}$. Перемножив уравнения системы,

имеем $3^{x+y} \cdot 5^{x+y} = 3^3 \cdot 5^3 \Leftrightarrow 15^{x+y} = 15^3 \Leftrightarrow x+y=3$. Разделив первое уравнение на

второе, получим $3^{x-y} \cdot 5^{y-x} = 3^{-1} \cdot 5 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x-y} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow x-y=-1$. Решение

данной системы сводится к решению равносильной ей системы $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$. В

результате получаем ответ: (1; 2).

2) Прологарифмировав каждое из уравнений, получим

$$\begin{cases} x \lg 4 + y \lg 5 = \lg 16 \\ \lg 2 + x \lg 3 = \lg 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \lg 2 + y \lg 5 = 4 \lg 2 \\ \lg 3 = \lg 2 + 2 \lg 3 \end{cases}. \text{ Из второго уравнения имеем}$$

$x \lg 3 = 2 \lg 3$, т.е. $x=2$. Подставив найденное значение $x=2$ в первое уравнение, получим

$4 \lg 2 + y \lg 5 = 4 \lg 2$, или $y \lg 5 = 0$, т.е. $y=0$. Итак, получаем ответ: (2;0). Этим

же способом можно было решить предыдущую систему.

3) Согласно свойствам корней квадратного уравнения, 3^x и 3^y служат корнями уравнения $z^2 - 12z + 27 = 0$. Решая последнее уравнение, находим $z_1 = 3$; $z_2 = 9$. Следовательно, $3^x = 3$, $x=1$ и $3^y = 9$, $y=2$ и, наоборот, $3^x = 9$, $x=2$ и $3^y = 3$, $y=1$. Итак, получим ответ: (1;2); (2;1).

Задания для самостоятельной работы

Решите системы уравнений:

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}; & 2) \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \\ 2^x + 3^y = 31 \end{cases}; & 3) \begin{cases} xy = y^x \\ x^3 = y^2 \end{cases}; \\
 4) \begin{cases} 2^{2x} - 3^y = 55 \\ 2^x - 3^{y/2} = 5 \end{cases}. & & \\
 2. 1) \begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 11\frac{1}{4}; \\ 2^x - 3^y = -3\frac{3}{4} \end{cases}; & 2) \begin{cases} 9^y \sqrt[3]{100} = 27\frac{1}{10}; \\ 25^y \sqrt[3]{10000} = 5\frac{1}{4} \end{cases}; & 3) \begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}; \\
 4) \begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}. & & \\
 3. 1) \begin{cases} 3^x - 4^y = 77 \\ 3^{x/2} - 2^y = 7 \end{cases}; & 2) \begin{cases} 3^y \cdot 2^{6/x} = 36 \\ 5^y \cdot 2^{9/x} = 200 \end{cases}. & &
 \end{array}$$

Практическое занятие №6

Тема: Системы логарифмических уравнений

Цель: Формирование навыков решения систем логарифмических уравнений

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Примеры

Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} \log_y x - 3 \log_x y = 2 \\ \log_2 x = 4 - \log_2 y \end{cases}$$

$$f(x)^{\varphi_1(x)} > f(x)^{\varphi_2(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ \varphi_1(x) > \varphi_2(x) \\ 0 < f(x) < 1 \\ \varphi_1(x) < \varphi_2(x) \end{cases} \quad (7.3)$$

Неравенство вида $\log_a x > c$, $\log_a x < c$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется *простейшими логарифмическими неравенствами*. Имеют место следующие равносильные преобразования:

$$\log_a x > c = \begin{cases} a > 1 \\ x > a^c \\ 0 < a < 1 \\ 0 < x < a^c \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\log_a x < c \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < x < a^c \\ 0 < a < 1 \\ x > a^c \end{cases} \quad (7.5)$$

$$\log_{f(x)} \varphi_1(x) > \log_{f(x)} \varphi_2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) > 0 \\ \varphi_2(x) > 0 \\ \begin{cases} f(x) > 1 \\ \varphi_1(x) > \varphi_2(x) \\ 0 < f(x) < 1 \\ \varphi_1(x) < \varphi_2(x) \end{cases} \end{cases} \quad (7.6)$$

Примеры

1. Решить показательные неравенства:

$$1) 3^x > 4; \quad 2) 6^{x^2-7x+12} > 1; \quad 3) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5x+8} < \frac{1}{9}; \quad 4) (x+3)^{x^2-5x+6} > 1.$$

Решение: 1) Используя преобразования (5.1) при $a=3$, $c=4$, получим $3^x > 4 \Leftrightarrow x > \log_3 4$.

$$2) 6^{x^2-7x+12} > 1 \Leftrightarrow 6^{x^2-7x+12} > 6^0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5x+8} < \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5x+8} < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 > 2 \Leftrightarrow$$

$$3) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases}.$$

4) Согласно преобразованию (7.3), данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$(x+3)^{x^2-5x+6} > 1 \Leftrightarrow (x+3)^{x^2-5x+6} > (x+3)^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > 1 \\ x^2-5x+6 > 0 \\ 0 < x+3 < 1 \\ x^2-5x+6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > -2 \\ x < 2 \end{cases} \\ x > 3 \\ \begin{cases} -3 < x < -2 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \end{cases}. \text{ Первая из систем}$$

равносильно двум системам, а вторая система решений не имеет, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -2 \\ x < 2 \\ x > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} -3 < x < -2 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -2 \\ x < 2 \\ x > -2 \\ x > 3 \end{cases} \\ \text{нет решения} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < 2 \\ x > 3 \end{array} \right].$$

2. Решить логарифмические неравенства:

$$1) \log_{1/2}^2 x > 36; \quad 2) 2 + \log_2(x+1) > 1 - \log_{1/2}(4-x^2).$$

Решение: 1) Очевидно, что $\log_{1/2}^2 x > 36 \Leftrightarrow \left| \log_{1/2} x \right| > 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1/2} x > 6 \\ \log_{1/2} x < -6 \end{cases}$. Используя

равносильное преобразование (7.4) и (7.5), получим

$$\begin{cases} \log_{1/2} x > 6 \\ \log_{1/2} x < -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < (1/2)^6 \\ x > (1/2)^{-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1/64 \\ x > 64 \end{cases}.$$

$$2 + \log_2(x+1) > 1 - \log_{1/2}(4-x^2) \Leftrightarrow 1 + \log_2(x+1) > \log_2(4-x^2) \Leftrightarrow$$

$$2) \text{ Имеем } \Leftrightarrow \log_2 2 + \log_2(x+1) > \log_2(4-x^2) \Leftrightarrow \log_2 2(x+1) > \log_2(4-x^2).$$

Используя далее равносильные преобразования (7.6), получим

$$\begin{aligned} \log_2 2(x+1) > \log_2(4-x^2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ 4-x^2 > 0 \\ 2(x+1) > 4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2-4 < 0 \\ x^2+2x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ -2 < x < 2 \\ x < -\sqrt{3}-1 \\ x > \sqrt{3}-1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ x < -\sqrt{3}-1 \\ x > \sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ x < -\sqrt{3}-1 \\ -1 < x < 2 \\ x > \sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{нет решений} \\ \sqrt{3}-1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3}-1 < x < 2 \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Решите показательные неравенства:

$$\begin{aligned} 1. \quad & 1) \left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{27}; \quad 2) 3^x > 27; \quad 3) 2^{x^2-8x+18} > 8. \\ 2. \quad & 1) (x^2-8x+16)^{x-6} < 1; \quad 2) (x-2)^{x^2-6x+8} > 1. \\ 3. \quad & 1) 5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x \quad 2) 4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-x} + 4^{1+\sqrt{x}}; \quad 3) \frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}}. \end{aligned}$$

Решите логарифмические неравенства:

$$\begin{aligned} 1. \quad & 1) \log_5(2x^2-3x-1) > 0; \quad 2) \log_{15}(x^2-4x+3) < 1; \quad 3) \log_{x+7} 25 > 2; \\ & 4) \log_{x+1} 9 < 2; \quad 5) \log_{3x-3} x > 1; \quad 6) \log_{3x+3} x < 1; \\ & 7) \log_{x-3}(x^2+4x-5) > \log_{x-3}(x-1); \quad 8) \log_2(x+1) + \log_2(11-x) < 5. \end{aligned}$$

$$2. \quad 1) \log_x \left(\frac{4x+5}{6-5x} \right) < -1; \quad 2) \log_x [\log_2 (4x-6)] \leq 1; \quad 3) \frac{1}{\log_2 x} \leq \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие неравенства называются простейшими показательными неравенствами?
2. Какие условия должны выполняться при решении показательных неравенств?
3. Какие неравенства называются простейшими логарифмическими неравенствами?
4. Какие условия должны выполняться при решении логарифмических неравенств?

Практическое занятие №8

Тема: Тригонометрические функции. Основные тригонометрические тождества

Цель: Формирование навыков вычисления тригонометрических функций

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Функции *синус* и *косинус* называются *тригонометрическими функциями*. Наряду с ними вводятся еще и функции *тангенс* и *котангенс*.

Тангенсом угла α называется отношение синуса α к косинусу α (при условии, что $\cos \alpha \neq 0$); *котангенсом* угла α называется отношение косинуса α к синусу (при условии, что $\sin \alpha \neq 0$):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Знаки тригонометрических функций по четвертям приведены в таблице.

Функция	Четверть			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Используя основные тригонометрические тождества, можно выразить через данную тригонометрическую функцию остальные функции. Эти выражения приведены в данной таблице.

Данная функция	Искомая функция			
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Примеры

1. Дано $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислить: 1) $\cos \alpha$; 2) $\operatorname{tg} \alpha$; 3) $\operatorname{ctg} \alpha$.

Решение: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$ (перед радикалом стоит минус, так как во II четверти

$$\cos \alpha < 0); \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}.$$

2. Упростить выражения: 1) $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \operatorname{tg} \alpha$; 2) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.

Решение: 1)
$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cdot \cos \alpha} =$$

$$= \frac{1 + \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$2) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1^2 = 1.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите значение остальных трех тригонометрических функций, если

$$1) \sin \alpha = -\frac{5}{13} \quad \text{и} \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi; 2) \cos \alpha = -\frac{8}{17} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15} \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$$

$$4) \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{7}{24} \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

2. Упростить выражения:

$$1) \sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha;$$

$$2) \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha;$$

$$3) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha};$$

$$4) \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha};$$

5) $tg^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + ctg^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$;

6) $\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$;

7) $\frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha}$;

8) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha (tg \alpha + ctg \alpha)$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Как определяются тригонометрические функции числового аргумента?
2. Какие знаки имеют тригонометрические функции в координатных четвертях?
3. Какие тригонометрические функции являются четными, а какие нечетными?
4. Что называется периодом функции? Какие периоды имеют тригонометрические функции?
5. Какими соотношениями связаны тригонометрические функции одного и того же аргумента?

Практическое занятие №9**Тема: Доказательство тригонометрических тождеств**

Цель: Формирование навыков доказательства тригонометрических тождеств

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Если две функции от одних и тех же аргументов имеют одну и ту же область определения и принимают равные значения при всех допустимых значениях аргументов, то они называются *тождественно равными*.

Равенство, справедливое при всех допустимых значениях аргументов, называется *тождеством*.

Если в состав тождества входят тригонометрические функции, то тождество называется *тригонометрическим*.

Переход от данной функции к тождественно равной ей называется *тождественным преобразованием функции*.

При доказательстве тригонометрических тождеств обычно применяют следующие приемы:

- производят преобразования над любой частью равенства (обычно над той, которая представляет более сложное выражение), так чтобы в результате тождественных преобразований над ней получилось выражение, стоящее в другой части равенства;
- преобразуют одновременно обе части доказываемого тождества, пока не станет очевидным, что в обеих частях получились тождественно равные выражения;
- используя свойство пропорции о равенстве произведений крайних и средних членов, убеждаются в равенстве этих произведений.

Примеры

1. Упростить выражение $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + tg \alpha$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + tg \alpha &= \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{1 + \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \right) \end{aligned}$$

2. Доказать тождество $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$.

Решение: $\left(\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{\sin^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha} \right) \Leftrightarrow$
 $\left(\frac{1 + 1 + 2 \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{2 \cdot (1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha} \right),$
 $\alpha \neq \pi k.$

3. Найти значение выражения $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$, если $\operatorname{tg} x = 2$.

Решение: Так как числитель и знаменатель – однородные многочлены одной и той же степени от $\sin x$ и

$$\cos x, \text{ то их можно разделить на } \cos^3 x; \text{ тогда получим } y = \frac{\operatorname{tg}^3 x + 1}{\operatorname{tg}^3 x - 1} = \frac{2^3 + 1}{2^3 - 1} = \frac{9}{7}.$$

Упростите выражения:

- 1) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$; 2) $\sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$;
- 3) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha$;
- 5) $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$; 6) $(1 + \sin \alpha) \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \cdot (1 - \sin \alpha)$;
- 7) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$; 8) $\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}$.

Докажите тождества:

- 1) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = (1 + \cos \alpha) \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha)$;
- 2) $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$; 3) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$;
- 4) $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \sin x + \cos x$;
- 5) $\sin^3 \alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$;
- 6) $\cos^2 \alpha \cdot (1 - \operatorname{tg} \alpha) \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$.

Найти значение выражения:

- 1) $y = \frac{\sin^4 z - \cos^4 z}{\sin^6 z - \cos^6 z}$, если $\operatorname{tg} z = 2$; 2) $y = \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + 2}{3 \sin x \cos x + \cos^2 x - 4}$, если $\operatorname{tg} x = 3$;
- 3) $y = \frac{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}{2 \sin^2 x + \cos^2 x}$, если $\operatorname{tg} x = 3$; 4) $y = \frac{3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x - 1}{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2}$, если $\operatorname{tg} x = 1$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие функции называются тождественно равными?
2. Что называется тождеством?
3. Что называется тождественным преобразованием функции?
4. Какие приемы применяются при доказательстве тригонометрических тождеств?

5. Какой вид имеют основные тригонометрические тождества?

Практическое занятие №10

Тема: Тригонометрические уравнения

Цель: Формирование навыков решения тригонометрических уравнений

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Тригонометрическими называются уравнения, содержащие неизвестное под знаком тригонометрических функций.

Решить тригонометрическое уравнение – это, значит, найти все его корни.

Корнем тригонометрического уравнения называется такое значение входящего в него неизвестного, которое удовлетворяет этому уравнению.

Решения тригонометрических уравнений находятся по формулам:

- для уравнения $\sin x = a$ решение имеет вид $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- для уравнения $\cos x = a$ решение имеет вид $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- для уравнения $\operatorname{tg} x = a$ решение имеет вид $x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- для уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ решение имеет вид $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи решения тригонометрических уравнений.

1. Если $\sin x = \sin y$, то необходимо и достаточно, чтобы $x - y = 2\pi k$ или $x + y = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.
2. Если $\cos x = \cos y$, то необходимо и достаточно, чтобы $x + y = 2\pi k$ или $x - y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
3. Для того, чтобы тангенсы двух углов x и y (отличных от углов вида $(2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$) были равны ($\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$), необходимо и достаточно, чтобы $x - y = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Примеры

Решить уравнения:

$$1) \sin 2x = \frac{1}{2}; \quad 2) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \operatorname{tg}(3x + 2) = -1; \quad 4) \operatorname{ctg} x = 1.$$

Решение: 1) $\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, отсюда следует, что множество корней данного уравнения имеет вид $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$.

2) Так как $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ и $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, то $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$3) \quad \operatorname{tg}(3x+2) = -1 \Leftrightarrow 3x+2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} - 2 + \pi k. \quad \text{Тогда}$$

множество корней уравнения имеет вид $x = -\frac{\pi}{12} - \frac{2}{3} + \pi k$.

$$4) \quad \text{Так как } \operatorname{arccctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \text{ то формула в данном случае принимает вид } x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$k \in \mathbb{Z}.$$

Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения:

$$1) \quad 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0;$$

$$2) \quad 4\cos^2 x + \sin x - 1 = 0;$$

$$3) \quad 3\sin x = 2;$$

$$4) \quad \operatorname{tg} x \cdot \cos x + \operatorname{tg} x - \cos x - 1 = 0;$$

$$5) \quad \operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x;$$

$$6) \quad \cos x \operatorname{tg} 3x = 0;$$

$$7) \quad \sin x - \cos x = 0;$$

$$8) \quad \sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0;$$

$$9) \quad 2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 4 = 0.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие уравнения называются тригонометрическими?
2. Что называется корнем тригонометрического уравнения?
3. Что называется периодом функции? Какие периоды имеют тригонометрические функции?
4. Какими соотношениями связаны тригонометрические функции одного и того же аргумента?
5. По каким формулам находятся решения простейших тригонометрических уравнений?

Практическое занятие №11

Тема: Решение тригонометрических уравнений приемами, требующими некоторых преобразований

Цель: Формирование навыков решения тригонометрических уравнений приемами, требующими некоторых преобразований

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Существуют два общих метода решения тригонометрических уравнений – *метод подстановки* и *метод разложения на множители*. При решении уравнений методом подстановки очень важен выбор функции, через которую выражаются различные тригонометрические функции одного и того же неизвестного аргумента, входящие в уравнение. Предпочтение необходимо отдавать той функции, которая приводит к рациональному уравнению.

Рациональные уравнения, в которые входят $\cos x$, $\sin x$ и постоянные, записываются в виде

$$R(\cos x, \sin x) = 0.$$

Однородным тригонометрическим уравнением первой степени называется уравнение вида

$$a \sin x + b \cos x = 0.$$

Однородным тригонометрическим уравнением второй степени называется уравнение вида

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Если $\cos x$ входит в уравнение лишь в четных степенях, то, заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим рациональное уравнение относительно $\sin x$.

При $a \neq 0$ однородным уравнениям первой и второй степеней не удовлетворяют те значения неизвестного x , при которых $\cos x = 0$. Поэтому, для их решения можно обе части уравнения разделить на $\cos x$ или на $\cos^2 x$; получится уравнение, равносильное данному, рациональное относительно $\operatorname{tg} x$. При почленном делении уравнения первой степени на $\cos x$ получим уравнение

$$a \operatorname{tg} x + b = 0.$$

При почленном делении уравнения второй степени на $\cos^2 x$ получим

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Любое уравнение вида $R(\cos x, \sin x) = 0$ можно решить с помощью подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$, называемой *универсальной*.

Примеры

Решить уравнения:

$$1) 2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0; \quad 2) \cos 4x \cos 2x - \cos 5x \cos x = 0.$$

Решение: 1) Разделив уравнение почленно на $\cos^2 x$, получим $2 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 3 = 0$. Используем подстановку $\operatorname{tg} x = z$. Тогда $2z^2 - 5z + 3 = 0$. Корни этого уравнения

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}. \text{ Следовательно, } \operatorname{tg} x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k,$$

$$k \in \mathbb{Z}, \text{ и } \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2) Заменим произведения в обоих слагаемых полусуммами косинусов суммы и разности аргументов:

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) - \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = 0;$$

$\cos 6x + \cos 2x - \cos 6x - \cos 4x = 0$, откуда $\cos 4x - \cos 2x = 0$. Заменим разность произведением $-2 \sin 3x \sin x = 0$, откуда $\sin 3x_1 = 0$, $\sin x_2 = 0$.

$$\sin 3x_1 = 0 \Rightarrow 3x_1 = \pi k \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

$\sin x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Так как вторая серия решений содержится в первой, то

$$\text{окончательно будем иметь } x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Задания для самостоятельной работы

Решите тригонометрические уравнения:

$$1) \sin 4x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} 2x = 0; \quad 2) 5 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 2;$$

- 3) $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x - 6\cos^2 x = 5$; 4) $\sin^2 x = 3\cos^2 x + \sin 2x$;
 5) $2\cos^2 x + \sin 2x = 2$; 6) $\sin 3x = \cos 2x$;
 7) $\sin(5\pi - x) = \cos(2x + 7\pi)$; 8) $5\sin x - 12\cos x = -13\sin 3x$;
 9) $\sin 5x \cdot \cos 3x - \sin 9x \cdot \cos 7x = 0$; 10) $\sin 6x \cos 2x = \sin 5x \cos 3x - \sin 2x$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие методы решения тригонометрических уравнений вы знаете?
2. Какое уравнение называется однородным тригонометрическим уравнением первой степени?
3. Какое уравнение называется однородным тригонометрическим уравнением второй степени?
4. Какая подстановка называется универсальной?

Практическое занятие №12

Тема: Производная функции. Общее правило дифференцирования функции

Цель: Формирование навыков нахождения производной функции по общему правилу дифференцирования

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δf в этой точке к приращению аргумента Δx , когда последнее, то есть Δx , стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой* в этом промежутке.

Для производной функции $y = f(x)$ употребляются следующие обозначения: y' , y'_x , $\frac{dy}{dx}$ или f' ,

$$f'(x), \frac{df(x)}{dx}.$$

Нахождение производной называется *дифференцированием*. Вычисление производной функции $y = f(x)$ производится по *общему правилу дифференцирования*:

- Придавая аргументу x , приращение Δx и подставляя в выражение функции вместо аргумента x наращенное значение $x + \Delta x$, находим наращенное значение функции: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.
- Вычитая из наращенного значения функции ее первоначальное значение, находим приращение функции:
 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
- Делим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx , то есть, составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

IV. Находим предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$, то есть, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Этот предел и есть производная от функции $y = f(x)$.

Примеры

Найти: 1) $y'(3)$, если $y = 2x^2 - 3x$;

2) $y'(4)$, если $y = \sqrt{x}$.

Решение: 1) Находим производную по общему правилу:

$$y + \Delta y = 2 \cdot (x + \Delta x)^2 - 3 \cdot (x + \Delta x) = 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 3x - 3\Delta x;$$

$$\Delta y = 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 3\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot (4x + 2\Delta x - 3)}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 3;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4x + 2\Delta x - 3 = 4x - 3. \text{ Таким образом, } y' = 4x - 3. \text{ Найдем значение}$$

производной при $x = 3$: $y'(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 9$.

2) Находим производную по общему правилу:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Найдем значение производной при $x = 4$: $y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

Задания для самостоятельной работы

Найдите по общему правилу дифференцирования:

1) $y'(0)$, если $y = x^2 - x$;

2) $y'(1)$, если $y = x^2 - 5x + 4$;

3) $s'(2)$, если $s = t^3$;

4) $y'(3)$, если $y = -\frac{3}{x}$;

5) $y'(-1)$, если $y = \frac{1}{x^2}$;

6) $y'(5)$, если $y = \sqrt{x-1}$;

7) $y'(4)$, если $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

8) $y'(2\sqrt{2})$, если $y = \sqrt[3]{x}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение производной функции.

2. Какие функции называются дифференцируемыми?
3. Сформулируйте общее правило дифференцирования производной.

Практическое занятие №13

Тема: Основные правила дифференцирования

Цель: Формирование навыков нахождения производной функции по основным правилам дифференцирования

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Введем обозначения: C - постоянная; x - аргумент; u, v, w - функции от x , имеющие производные.

Основные правила дифференцирования

Производная алгебраической суммы функций:

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

Производная произведения двух функций:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Производная произведения трех функций:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

Производная произведения постоянной величины на функцию:

$$(Cu)' = Cu'.$$

Производная частного (дроби):

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Частные случаи дроби:

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C} \cdot u'; \quad \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2} \cdot v'.$$

При вычислении производных необходимо помнить, что $a^0 = 1 (a \neq 0)$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0)$;

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} (a > 0)$, и знать следующие правила действий со степенями и корнями:

$$1) a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad 2) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \quad 3) (a^n)^m = a^{n \cdot m};$$

$$4) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} (a > 0, b > 0);$$

$$5) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} (a > 0, b > 0).$$

Здесь m и n - любые рациональные числа.

Формулы дифференцирования основных функций

- | | |
|--|---|
| 1) $(C)' = 0;$ | 8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$ |
| 2) $(x)' = 1;$ | 9) $(\ln x)' = \frac{1}{x};$ |
| 3) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1};$ | 10) $(\sin x)' = \cos x;$ |
| 4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$ | 11) $(\cos x)' = -\sin x;$ |
| 5) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$ | 12) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$ |
| 6) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a;$ | 13) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| 7) $(e^x)' = e^x;$ | |

Примеры

Найти производные следующих функций:

- 1) $y = 3x^4;$ 2) $y = 2x^{-5};$ 3) $y = 4x^{\frac{1}{3}};$ 4) $y = 5x^{-\frac{2}{5}};$
 5) $y = 5 \cdot \sqrt[5]{x^3}.$

Решения: 1) $y = 3x^4$ используя формулы дифференцирования, получим:

$$y' = 3 \cdot (x^4)' = 3 \cdot 4x^{4-1} = 12x^3;$$

$$2) y = 2x^{-5}, \Rightarrow, y' = -10x^{-6} = -\frac{10}{x^6};$$

$$3) y = 4x^{\frac{1}{3}}, \Rightarrow, y' = 4 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}};$$

$$4) y = 5x^{-\frac{2}{5}}, \Rightarrow, y' = 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot x^{-\frac{2}{5}-1} = -2x^{-\frac{7}{5}};$$

$$5) y = 5 \cdot \sqrt[5]{x^3}, \Rightarrow, y' = 5 \cdot \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = 5 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} = 3x^{-\frac{2}{5}}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить производные функций:

1) $y = \frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}};$

2) $y = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{x};$

3) $y = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x}};$

4) $y = 4x^3 + 2x^2 + x - 5;$

5) $y = (x^3 - 1) \cdot (x^2 + x + 1);$

6) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$

7) $y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4};$

8) $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{4x};$

9) $y = \frac{x-1}{5x-2};$

10) $y = \frac{6x^4 - 7x^3 + x^2 - 5x + 3}{2x^3};$

11) $y = (9 - 2x) \cdot (2x^3 - 9x^2 + 1);$

12) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x + 2};$

13) $y = 8\sin x - 4^x;$

14) $y = e^x - 3x^2;$

15) $y = e^x \cdot \operatorname{tg} x;$

16) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{e^x - x}.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите правила нахождения производной функции.
2. Чему равна производная суммы дифференцируемых функций?
3. Чему равна производная произведения дифференцируемых функций?
4. Чему равна производная частного двух дифференцируемых функций?
5. Чему равна производная постоянной величины и степенной функции?
6. Чему равна производная показательной и логарифмической функций?
7. Чему равны производные тригонометрических функций?

Практическое занятие №14**Тема: Производная сложной функции**

Цель: Формирование навыков нахождения производной сложной функции

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Пусть $y = y(u)$ и $u = u(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y = y(u(x))$ есть также дифференцируемая функция, причем $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, или $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций:
производная сложной функции равна произведению производных функций, ее составляющих.

Примеры

Найти производные следующих функций:

$$1) y = (x^2 - 5x + 8)^6; \quad 2) y = \frac{1}{(x^2 - 1)^4}; \quad 3) f(x) = \sqrt{4 - x^2};$$

$$4) y = (x^2 + 6) \cdot \sqrt{x^2 - 3}; \quad 5) y = \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}.$$

Решение: 1) $y = (x^2 - 5x + 8)^6$, пусть $u = x^2 - 5x + 8 \Rightarrow y = u^6$. Таким образом,

$$y' = 6u^5 \cdot u' = 6 \cdot (x^2 - 5x + 8)^5 \cdot (2x - 5).$$

2) $y = \frac{1}{(x^2 - 1)^4}$, перепишем данное выражение в виде $y = (x^2 - 1)^{-4}$. Получим,

$$y' = -4 \cdot (x^2 - 1)^{-4-1} \cdot 2x = -4 \cdot (x^2 - 1)^{-5} \cdot 2x = -\frac{8x}{(x^2 - 1)^5}.$$

3) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, пусть $u = 4 - x^2$, получим $f(x) = \sqrt{u}$. Тогда получим,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} \cdot (4 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

4) $y = (x^2 + 6) \cdot \sqrt{x^2 - 3}$, $\Rightarrow$, что $y' = (x^2 + 6)' \cdot \sqrt{x^2 - 3} + (x^2 + 6) \cdot (\sqrt{x^2 - 3})'$, $\Rightarrow$,

$$\text{что } y' = 2x \cdot \sqrt{x^2 - 3} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 3}} \cdot (x^2 + 6) = 2x \cdot \sqrt{x^2 - 3} + \frac{x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 - 3}} =$$

$$= \frac{2x \cdot (\sqrt{x^2 - 3})^2 + x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{2x \cdot (x^2 - 3) + x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{3x^3}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

5) $y = \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}$, перепишем данное выражение в виде $y = (x^3 + 1)^{\frac{2}{3}}$. Получим,

$$y' = \frac{2}{3} \cdot (x^3 + 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot (x^3 + 1)' = \frac{2}{3} \cdot (x^3 + 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}.$$

Задания для самостоятельной работы

Найдите производные следующих функций:

$$1) y = (x^3 - 2x^2 + 5)^3; \quad 2) y = (x^3 - 1)^6; \quad 3) f(x) = (ax^2 + bx + c)^n;$$

$$4) y = (r^2 - x^2)^4; \quad 5) y = \frac{1}{(1 - x^3)^5}; \quad 6) y = \frac{1}{(ax + b)^n};$$

$$7) y = \frac{(x^4 + 1)^3}{(x^3 + 1)^2}; \quad 8) y = \left(\frac{a + x}{a - x} \right)^n; \quad 9) f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6};$$

$$10) y = \sqrt{r^2 - x^2}; \quad 11) y = \sqrt[3]{x^3 - 1}; \quad 12) y = \sqrt[4]{(ax + b)^3};$$

$$13) y = \sqrt{(2x - 1)^3}; \quad 14) y = (3 - 2x)^3 \cdot (x - 1)^2; \quad 15) y = (x - 2) \cdot \sqrt{x^2 + 1};$$

$$16) y = 3x \cdot \sqrt{1 - x^3}; \quad 17) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}; \quad 18) y = \sin(2x - 1);$$

$$19) y = \ln^3 x; \quad 20) y = \sin^2 x; \quad 21) y = \cos x^2;$$

22) $y = 10^{5-3x}$;

23) $y = 7e^{-x^2}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая функция называется сложной?
2. По какой формуле находится производная сложной функции?
3. Чему равна производная сложной функции?

Практическое занятие №15**Тема: Возрастание и убывание функции****Цель:** Формирование навыков нахождения промежутков монотонности функций**На выполнение работы** отводится 2 часа**Требования к выполнению работы:**

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в промежутке (a, b) , если для любых x_1 и x_2 принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в промежутке (a, b) , если для любых x_1 и x_2 принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Как возрастающие, так и убывающие функции называются *монотонными*, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает – *промежутками монотонности*.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной; если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает в этом промежутке; если же $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом промежутке.

Примеры

Найдите промежутки монотонности следующих функций:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$;

2) $y = \sqrt{x - x^2}$.

Решение: 1) Имеем $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f'(x) = 0$, $\Rightarrow$, что $3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 4 \end{cases}$.

Составим таблицу:

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < 4$	4	$4 < x < +\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

В промежутках $(-\infty; 0)$ и $(4; +\infty)$ функция возрастает, а промежутке $(0; 4)$ функция убывает.

2) Для нахождения ОДЗ решим неравенство $x - x^2 \geq 0$, $\Rightarrow$, что $0 \leq x \leq 1$. Таким образом, данная функция определена в промежутке $[0; 1]$. $y' = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$, так как знаменатель дроби положителен, то знак этой дроби совпадает со знаком ее числителя. Учитывая, что функция определена при $0 \leq x \leq 1$, получаем: $y' > 0$, при $1-2x > 0$, то есть, при $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$; $y' < 0$, при $1-2x < 0$, то есть, при $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Следовательно, в промежутке $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ функция возрастает, а в промежутке $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ функция убывает.

Задания для самостоятельной работы

Найти промежутки монотонности следующих функций:

- 1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; 2) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$; 3) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$;
- 4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; 5) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$; 6) $f(x) = x^4 - 4x + 3$;
- 7) $f(x) = x^4 - 32x + 40$; 8) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - x + 1$; 9) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 15$;
- 10) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 20$; 11) $f(x) = -\frac{1}{x}$; 12) $f(x) = \frac{1}{3x-2}$;
- 13) $y = \sqrt{x-2x^2}$; 14) $y = \sqrt{x^2-3x}$; 15) $y = e^{-x}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определения возрастания и убывания функции.
2. Какие функции называются монотонными?
3. Как определяются промежутки возрастания и убывания функции?

Практическое занятие №16

Тема: Исследование функции на экстремум с помощью производной

Цель: Формирование навыков исследования функции на экстремум с помощью первой и второй производной

На выполнение работы отводится 4 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Правило нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью первой производной

1. найти производную $f'(x)$;
2. найти критические точки функции $y = f(x)$, то есть точки, в которых $f'(x)$ обращается в ноль или терпит разрыв;

- исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежутков, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, знак производной не меняется, то в критической точке функция экстремумов не имеет.
- вычислить значения функции в точках экстремума.

Правило нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью второй производной

- найти производную $f'(x)$;
- найти критические точки функции $y = f(x)$, то есть точки в которых $f'(x) = 0$;
- найти вторую производную $f''(x)$;
- исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то – минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.
- вычислить значения функции в точках экстремума.

Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

- найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;
- найти значения функции на концах промежутка;
- сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$

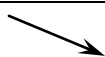
- найти вторую производную $f''(x)$;
- найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в ноль или терпит разрыв;
- исследовать знак второй производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба функции;
- вычислить значения функции в точках перегиба.

Примеры

- Вычислить максимум и минимум функции $f(x) = x^2 - 4x$.

Решение: $f'(x) = 2x - 4$. Полагая, что $f'(x) = 0$, получим единственную критическую точку $x = 2$.

Дальнейшие рассуждения запишем в таблице

x	$-\infty < x < 2$	2	$2 < x < +\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$f_{\min} = f(2) = -4$	

Так как при переходе через критическую точку $x = 2$ производная меняет знак с минуса на плюс, то в данной точке функция имеет минимум. Таким образом, $f_{\min} = f(2) = -4$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ в промежутке $0 \leq x \leq 3$.

Решение: $f'(x) = 2x - 4$. Полагая, что $f'(x) = 0$, получим $x = 2$, то есть $x = 2$ - критическая точка.

Найдем значение функции в критической точке и на концах промежутка: $f(2) = -1$, $f(0) = 3$ и $f(3) = 0$. Таким образом получаем, что $f(2) = -1$ - наименьшее значение функции, а $f(0) = 3$ - наибольшее значение функции.

3. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба кривой $f(x) = x^3$.

Решение: Найдем первую производную функции, то есть $f'(x) = 3x^2$. Вторая производная имеет вид

$f''(x) = 6x$, полагая $f''(x) = 0$, получим единственную критическую точку $x = 0$.

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < +\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	выпукла вверх	0	выпукла вниз

При $x = 0$ кривая имеет точку перегиба. Вычислим значение функции в точке $x = 0$, получим $f(0) = 0$. Таким образом, $(0; 0)$ - точку перегиба графика функции $f(x) = x^3$.

4. Вычислить экстремум функции $f(x) = x^2 - 2x - 3$ с помощью второй производной.

Решение: $f'(x) = 2x - 2$, полагая $f'(x) = 0$, получим $x = 1$ - критическая точка. Найдем вторую производную, $f''(x) = 2$. Так как вторая производная в критической точке положительна, то при $x = 1$ данная функция имеет минимум, то есть $f_{\min} = f(1) = -4$.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить максимум и минимум следующих функций:

$$\begin{array}{ll} 1) y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1; & 2) y = \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^4 + 51; \\ 3) y = x^5 - 5x + 5; & 4) y = 2x^3 - 14x^{\frac{1}{2}} - 64; \\ 5) y = \frac{2}{9x-2}; & 6) y = \frac{1}{3x-2}. \end{array}$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

$$\begin{array}{l} 1) y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{3} \text{ на отрезке } -2 \leq x \leq 2; \\ 2) y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 4x - 2 \text{ на отрезке } -2 \leq x \leq 4; \\ 3) y = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{3} \text{ на отрезке } -2 \leq x \leq 2; \end{array}$$

- Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс неопределенная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

- Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d \int f(x) dx = f(x) dx, \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

- Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)] dx = \int f(x) dx + \int \varphi(x) dx.$$

- Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$

- Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, $u = \varphi(x)$ - любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

$$\begin{aligned} \int dx &= x + C; & \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1); \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C; & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C; \\ \int e^x dx &= e^x + C; & \int \sin x dx &= -\cos x + C; \\ \int \cos x dx &= \sin x + C; & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + C; \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{ctg} x + C; & \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C; \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C; & \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + C; \\ \int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Непосредственное интегрирование

Этот метод основан на прямом использовании таблицы интегралов. Здесь могут представляться следующие случаи:

1. Данный интеграл находится по соответствующему табличному интегралу;
2. Данный интеграл после применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам;
3. Данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Примеры

Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int 8x^3 dx; \quad 2) \int (7x^2 + 3\cos x - \sqrt[3]{x}) dx; \quad 3) \int \frac{(3x+1)^2}{x} dx.$$

Решение: 1) $\int 8x^3 dx = 8 \int x^3 dx = 8 \cdot \frac{x^4}{4} + C = 2x^4 + C;$

$$2) \int (7x^2 + 3\cos x - \sqrt[3]{x}) dx = 7 \int x^2 dx + 3 \int \cos x dx - \int x^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \frac{7x^3}{3} + 3\sin x - \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{7}{3}x^3 + 3\sin x - \frac{3}{4}x \cdot \sqrt[3]{x} + C.$$

$$3) \int \frac{(3x+1)^2}{x} dx = \int \frac{9x^2 + 6x + 1}{x} dx = 9 \int x dx + 6 \int dx + \int \frac{dx}{x} =$$

$$= 9 \cdot \frac{x^2}{2} + 6x + \ln|x| + C = 4,5x^2 + 6x + \ln|x| + C.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int 5dx; \quad 2) \int 6x^2 dx; \quad 3) \int 4 \cdot (x^2 - x + 3) dx;$$

$$4) \int 2 \cdot (3x-1)^2 dx; \quad 5) \int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx; \quad 6) \int x^{-4} dx;$$

$$7) \int \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad 8) \int \frac{dx}{x+1}; \quad 9) \int 2^x dx;$$

$$10) \int 2^{x^2} x dx; \quad 11) \int e^{-3x^2} dx; \quad 12) \int \sin(ax+b) dx;$$

$$13) \int \cos(5x-3) dx; \quad 14) \int \operatorname{tg} x dx; \quad 15) \int \frac{5dy}{\cos^2 y};$$

$$16) \int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}; \quad 17) \int \frac{dz}{2 \sin^2 z}; \quad 18) \int \frac{x dx}{\sin^2(x^2+1)};$$

$$19) \int \frac{dx}{x^2-4}; \quad 20) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}; \quad 21) \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};$$

$$22) \int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}; \quad 23) \int \frac{dx}{16+x^2}; \quad 24) \int \frac{dx}{25+4x^2}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется первообразной? Перечислите свойства первообразной.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете?
4. Перечислите основные формулы интегрирования.
5. Какие методы интегрирования вы знаете?

Практическое занятие №18

Тема: Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница

Цель: Формирование навыков вычисления определенного интеграла при помощи формулы Ньютона – Лейбница

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Функция, $f(x)$ интегрируемая на промежутке $[a; b]$, если при любых разбиениях $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ промежутка $[a; b]$, таких, что $\Delta x = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0$ при произвольном выборе точек

ξ_k (где $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$), сумма $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к пределу S .

Предел $S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x$ называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке

$[a; b]$ и обозначают $\int_a^b f(x) dx$, то есть $S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$.

Число a называется *нижним пределом* интеграла, b - *верхним*. Промежуток $[a; b]$ называется *промежутком интегрирования*, x - *переменной интегрирования*.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит *формула Ньютона – Лейбница*:

$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$. То есть *определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования*.

Примеры

Вычислить следующие определенные интегралы:

$$1) \int_0^1 x dx;$$

$$2) \int_2^3 x^2 dx;$$

$$3) \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx;$$

$$4) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$$

$$5) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Решение: $1) \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2};$

$$2) \int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{1}{3} \cdot (3^3 - 2^3) = \frac{19}{3};$$

$$3) \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) \right) =$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 4 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) = \frac{8}{3} + 6 + \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{9}{3} + 6 = 3 + 6 = 9;$$

$$4) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$5) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right) = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить следующие определенные интегралы:

$$1) \int_1^2 x^3 dx;$$

$$2) \int_1^3 x^4 dx;$$

$$3) \int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx;$$

$$4) \int_{-1}^0 (x^3 + 2x) dx;$$

$$5) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3};$$

$$6) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2};$$

$$7) \int_0^4 \sqrt{x} dx;$$

$$8) \int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx;$$

$$9) \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$10) \int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$11) \int_1^4 \frac{32}{x^3} dx;$$

$$12) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2};$$

$$13) \int_3^4 \frac{7+x+x^3}{x^3} dx;$$

$$14) \int_1^4 \left(3t^2 - 2t - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) dt;$$

$$15) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. В чем заключается суть формулы Ньютона – Лейбница?

Практическое занятие №19

Тема: Вычисление площади плоской фигуры

Цель: Формирование навыков вычисления площади фигур, ограниченных линиями

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Определенный интеграл широко применяется при вычислениях различных геометрических фигур и физических величин.

Найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a \leq x \leq b$, $f(x) \geq 0$ (рис. 1).

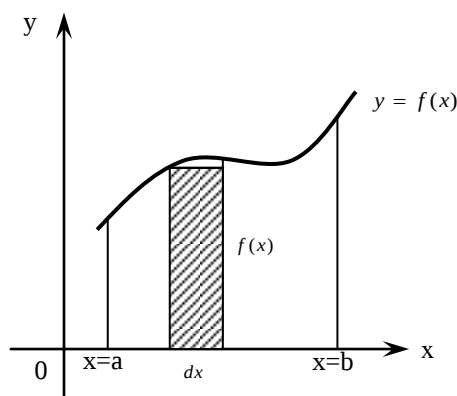


рис. 1

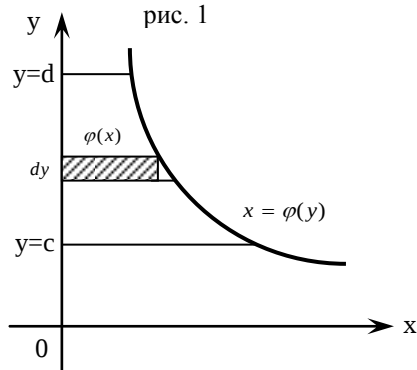


рис. 2

Так как дифференциал переменной площади S есть площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $f(x)$, то есть $dS = f(x)dx$, то, интегрируя это равенство в пределах от a до b , получим $S = \int_a^b f(x)dx$.

Если криволинейная трапеция прилегает к оси Oy так, что $c \leq y \leq d$, $x = \varphi(y) \geq 0$ (рис. 2), то дифференциал переменной площади S равен $dS = \varphi(y)dy$, откуда $S = \int_c^d \varphi(y)dy$.

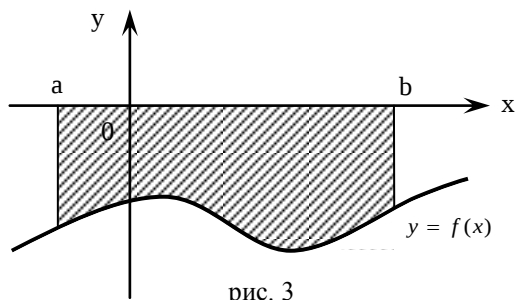


рис. 3

Если фигура, ограниченная кривой $f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, расположена по обе стороны от оси Ox (рис. 4), то

$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b |f(x)|dx.$$

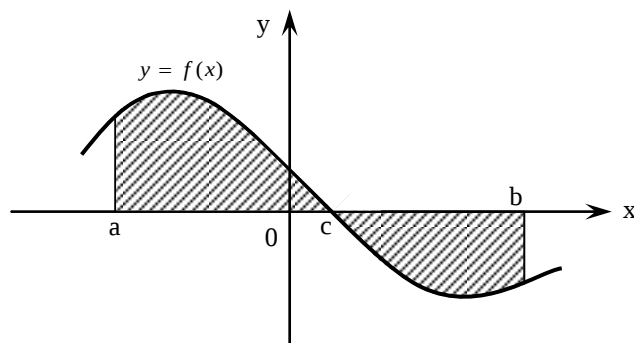


рис. 4

Пусть фигура S ограничена двумя пересекающимися кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, и прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a \leq x \leq b$ и $f_1(x) \leq f_2(x)$ (рис. 5). Тогда ее площадь находится по формуле $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

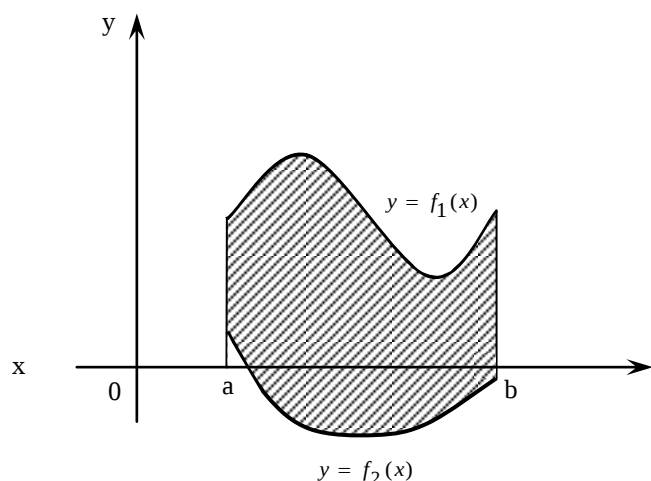


рис. 5

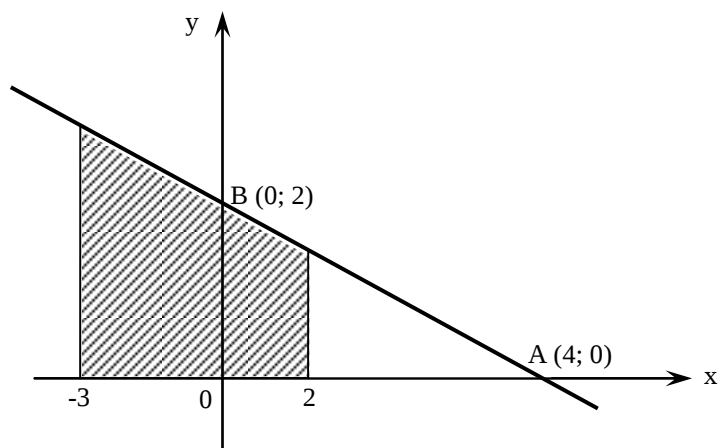
Примеры

Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1) $x + 2y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = -3$ и $x = 2$;

2) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 3$.

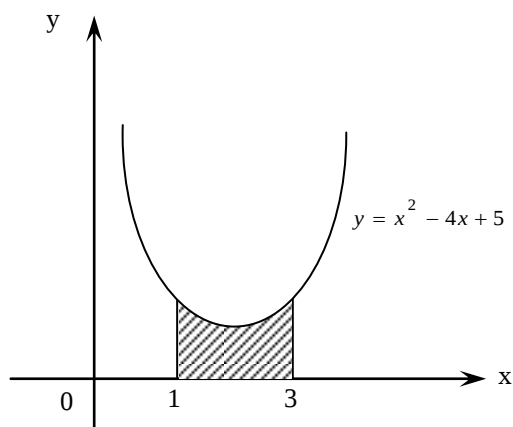
Решение: 1) Строим прямую $x + 2y - 4 = 0$ по двум точкам $A(4; 0)$ и $B(0; 2)$.



Выразим y через x , получим $y = -0,5x + 2$. Найдём площадь полученной фигуры:

$$S = \int_{-3}^2 (-0,5x + 2)dx = \left[-0,25x^2 + 2x \right]_{-3}^2 = 11,25$$

Ответ: $S = 11,25$ кв. ед.



2) $y = x^2 - 4x + 5$ - квадратичная функция; $D(y) = R$; график - парабола, ветви направлены вверх. Найдем координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$, отсюда следует, что $y = 4 - 8 + 5 = 1$. Таким образом, вершина параболы имеет координаты: $(2; 1)$. Найдем площадь полученной фигуры:

$$S = \int_1^3 (x^2 - 4x + 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right) \Big|_1^3 = (9 - 18 + 15) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 5 \right)$$

Ответ: $S = 2\frac{2}{3}$ кв. ед.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1) $x - y + 2 = 0$, $y = 0$, $x = -1$ и $x = 2$;

2) $2x - 3y + 6 = 0$, $y = 0$ и $x = 3$;

3) $y^2 = x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 3$;

4) $y = -x^2 - 2x + 8$, $y = 0$;

5) $y = \left(-\frac{2}{9}\right)x^2 + \frac{4}{3}x$, $y = 0$;

6) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 3$;

7) $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 2$ и $x = 4$;

8) $y = x^3$, $y = 0$, $x = -2$ и $x = 2$;

9) $y = 4x^3$, $y = 0$, $x = -1$ и $x = 2$;

10) $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

Вопросы для самоконтроля:

1. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, находящейся над осью Ox ?
2. По какой формуле вычисляется площадь фигуры прилегающей к оси Oy ?
3. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, находящейся под осью Ox ?
4. По какой формуле вычисляется площадь фигуры расположенной по обе стороны оси Ox ?
5. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, ограниченной двумя пересекающимися кривыми?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башмаков М.М. Алгебра и начала анализа, 3-е издание для 10-11 классов средней школы - М.,1993
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие.-4-е изд., стер. - М.: Высш. шк.,1997
3. Дадаян А.А. Математика: Учебник. – М.: ФОРУМ: ИНФРА – М, 2003
4. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начала анализа. - М.,1990
5. Подольский В.А., Суходский А.М., Мироненко Е.С. Сборник задач по математике: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1999
6. Фудзидова Т.Д. Математика для инженеров. - М.,1984
7. Яковлева Г.Н. Математика для техникумов. - М.,1988